Devoir Surveillé n°5 Correction

Troisième

Bilan : Type Brevet

Durée 2 heures

Année 2019-2020

Exercice 1. QCM — 4 points

1. Réponse C : $587\,000\,000 = 5,87 \times 10^8$.
2. Réponse A : $(x+2)(3x-1) = 3x^2 - x + 6x - 2 = 3x^2 + 5x - 2$.
3. Réponse B : Si $x = -2$ alors $\left(-x^2 - x + 1\right) = -(-2)^2 - (-2) + 1 = -4 + 2 + 1 = -1$.
4. Réponse B : $-8 \times (-8) \times \cdots \times (-8) = (-8)^{18}$.

Exercice 2. — 4 points

Calcul n° 1 : [1,5 point] .

$$A = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \div \frac{3}{4}$$
$$A = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \times \frac{4}{3}$$
$$A = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} - \frac{4}{18}$$
$$A = \frac{11}{18}$$

Calcul n° 2 : [1 point]

$$B = \sqrt{18} + \sqrt{2}$$
$$B = \sqrt{9 \times 2} + \sqrt{2}$$
$$B = \sqrt{9} \times \sqrt{2} + \sqrt{2}$$
$$B = 3\sqrt{2} + \sqrt{2}$$
$$B = 4\sqrt{2}$$

Calcul n° 3 : [1,5 point].

$$C = \frac{8 \times 10^{15} + 2 \times 10^{15}}{8 \times 10^7 \times 2 \times 10^8}$$
$$C = \frac{(8+2) \times 10^{15}}{(8 \times 2) \times 10^{7+8}}$$
$$C = \frac{10 \times 10^{15}}{16 \times 10^{15}}$$
$$C = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

Exercice 3. PGCD — 4 points

Un chocolatier vient de fabriquer 2 622 oeufs de Pâques et 2 530 poissons en chocolat.

1. **Le chocolatier peut-il faire 19 paquets ? Justifier.**
Le nombre de paquets doit être un diviseur commun du nombre d'oeufs de Pâques et de poissons au chocolat. Or 19 ne divise pas 2 530 car le reste de la division euclidienne de 2 530 par 19 n'est pas nul :

$$2\,530 = 19 \times 133 + 3$$

Si il fait 19 paquets, il lui restera donc 3 poissons. Il ne peut donc pas faire 19 paquets sans qu'il ne reste de poissons.

2. **Quel est le plus grand nombre de paquets qu'il peut réaliser ? Dans ce cas, quelle sera la composition de chaque paquet ?**

   - [0.5 pt] Justification.
   Le nombre de paquets cherché N, est un diviseur commun de 2 530 et de 2 622. Or on cherche le nombre maximum de paquets et de ce fait N est le PGCD de 2 530 et de 2 622.
   - [2 pts] Calcul.
   Utilisons l'algorithme d'Euclide pour calculer ce PGCD :

$$2\,622 = 1 \times 2\,530 + 92$$
$$2\,530 = 27 \times 92 + 46$$
$$92 = 2 \times 46 + 0$$

   Le dernier reste non nul est 46, qui est donc le PGCD de 2 622 et de 2 530.

$$\boxed{\text{Le nombre maximal de paquets est de 46.}}$$

- [0.5 pt] Composition.
  En outre, puisque :

  $$2\,622 = 46 \times 57 \quad \text{et} \quad 2\,530 = 46 \times 55$$

  La composition de chacun des 46 paquets sera de 57 oeufs de Pâques et 55 poissons au chocolat.

Exercice 4. Programme de calcul — 4 points

1. Pour Sophie : « *Quand je prends 4 comme nombre de départ, j'obtiens 8.* »

Choix du nombre	4
Étape 1 : ajouter 8	$4 + 8 = 12$
Étape 2 : multiplier le résultat par 3	$12 \times 3 = 36$
Étape 3 : enlever 24	$36 - 24 = 12$
Étape 4 : enlever le nombre de départ	$12 - 4 = 8$
Résultat	8

Le résultat est bien 8, Sophie a raison.

2. Pour Martin : « *Quand je prends 0 comme nombre de départ, j'obtiens 0.* »

Choix du nombre	0
Étape 1	$0 + 8 = 8$
Étape 2	$8 \times 3 = 24$
Étape 3	$24 - 24 = 0$
Étape 4	$0 - 0 = 0$
Résultat	0

Le résultat est bien 0, Martin a raison.

3. Pour Gabriel : « *Moi, j'ai pris -3 au départ et j'ai obtenu -9.* »

Choix du nombre	-3
Étape 1	$-3 + 8 = 5$
Étape 2	$5 \times 3 = 15$
Étape 3	$15 - 24 = -9$
Étape 4	$-9 - (-3) = -6$
Résultat	-6

Le résultat est $-6 \neq -9$, Gabriel a tort.

4. Pour Faïza : « *Pour n'importe quel nombre choisi, le résultat final est égal au double du nombre de départ.* »

Choix du nombre	x
Étape 1	$x + 8$
Étape 2	$(x + 8) \times 3 = 3x + 24$
Étape 3	$3x + 24 - 24 = 3x$
Étape 4	$3x - x = 2x$
Résultat	$2 \times x$

Le résultat est $2 \times x$, qui est bien le double du nombre choisi au départ, Faïza a raison.

Exercice 5. 4 points

$$A(x) = (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3)$$

1. Montrer que $A(x) = -5x^2 - 9x - 4$.

$$\begin{aligned}
A(x) &= (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3) \\
A(x) &= 2x - x^2 + 2 - x - 2(2x^2 + 3x + 2x + 3) \\
A(x) &= -x^2 + x + 2 - 4x^2 - 6x - 4x - 6 \\
A(x) &= \underline{-5x^2 - 9x - 4}
\end{aligned}$$

2. En factorisant, montrer que $A(x) = (x+1)(-5x-4)$.

$$\begin{aligned}
A(x) &= (x+1)(2-x) - 2(x+1)(2x+3) \\
A(x) &= (x+1) \times \Big[(2-x) - 2(2x+3)\Big] \\
A(x) &= (x+1)\,[2 - x - 4x - 6] \\
A(x) &= \underline{(x+1)(-5x-4)}
\end{aligned}$$

3. Calculer $A(x)$ en remplaçant x par 2.
En utilisant la forme factorisée on obtient facilement le résultat :

$$A(2) = (2+1)(-5\times 2 - 4) = 3 \times (-14) = -42 \Longrightarrow \boxed{A(2) = -42}$$

4. Résoudre l'équation : $A(x) = 0$.
En utilisant la forme factorisée :

$$A(x) = 0 \Longleftrightarrow (x+1)(-5x-4) = 0$$

C'est une équation produit nul, donc par théorème :

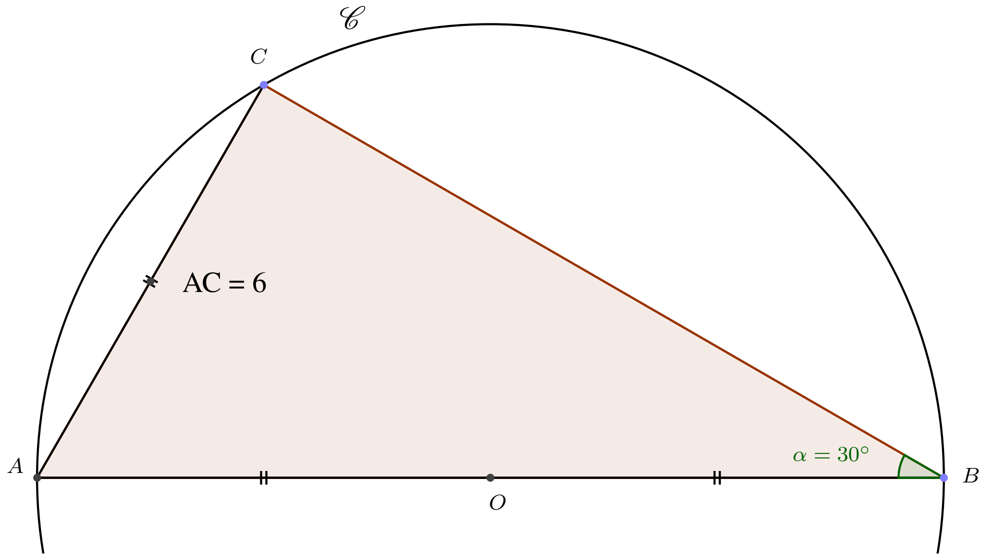
$$\begin{aligned}
A(x) = 0 &\Longleftrightarrow \Big(x+1=0\Big) \text{ ou } \Big(-5x-4=0\Big) \\
A(x) = 0 &\Longleftrightarrow \Big(x=-1\Big) \text{ ou } \Big(-5x=4\Big) \\
A(x) = 0 &\Longleftrightarrow \Big(x=-1\Big) \text{ ou } \Big(x=-\frac{4}{5}\Big)
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont donc : $\boxed{-1 \text{ et } -\frac{4}{5}}$.

Exercice 6. Géométrie 7 points

[AB] est un segment de milieu O tel que AB = 12 cm. Le point C appartient au cercle de centre O passant par A. De plus AC = 6 cm. L'angle $\widehat{ABC}$ mesure 30 °.
Remarque : *l'énoncé original comportait une erreur sur l'angle $\widehat{ABC}$ qui était supposé mesurer 60° ce qui est impossible. Le corrigé ci-dessous est réalisé à partir de la valeur correcte de cet angle, soit 30°.*

1. Construire la figure en vraie grandeur.



2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

2. a. Le triangle ABC est rectangle : Affirmation VRAIE.

Le point C appartient au cercle de diamètre [AB], en étant distinct des points A et B, de ce fait le triangle ABC est rectangle en C.

2. b. Le segment [BC] mesure 10 cm : Affirmation FAUSSE.

Plusieurs possibilités pour calculer BC dans le triangle rectangle ABC, avec la trigonométrie (c'est toujours plus rapide), et avec le théorème de Pythagore.

- **Avec la trigonométrie : 2 méthodes, avec tan ou avec cos**

Le triangle ABC est rectangle en C donc

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \text{ soit } \tan 30° = \frac{6}{BC}$$

Et donc

$$\boxed{BC = \frac{6}{\tan 30°} \approx 10,4 \text{ cm} \neq 10 \text{ cm}}$$

Le triangle ABC est rectangle en C donc

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{BC}{AB} \text{ soit } \cos 30° = \frac{BC}{12}$$

Et donc

$$\boxed{BC = 12 \times \cos 30° \approx 10,4 \text{ cm} \neq 10 \text{ cm}}$$

- **Avec Pythagore**

Le triangle ABC est rectangle en C donc d'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$
$$12^2 = 6^2 + CB^2$$
$$BC^2 = 12^2 - 6^2$$
$$BC^2 = 108$$

Or BC est positif car c'est une longueur, la seule solution positive est alors :

$$\boxed{BC = \sqrt{108} \approx 10,4 \text{ cm} \neq 10 \text{ cm}}$$

L'affirmation est donc bien **fausse**.

2. c. L'angle $\widehat{AOC}$ mesure 60° : Affirmation VRAIE.

- **Méthode 1** :
L'angle au centre $\widehat{AOC}$ intercepte le même arc $\overset{\frown}{AC}$ que l'angle inscrit $\widehat{ABC}$. Or on sait par théorème que la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit intersectant le même arc, de ce fait :

$$\boxed{\widehat{AOC} = 2 \times \widehat{ABC} = 60°}$$

- **Méthode 2** :
  - Les côtés [OA] et [OC] sont des rayon du cercle donc leur mesure est 6 cm.
  - Or on a aussi $AC = 6$ cm donc le triangle AOC est équilatéral et ses angles mesurent tous 60°.
  - L'angle $\widehat{\text{AOC}}$ mesure donc 60 ˚, l'affirmation est VRAIE.

2. d. [1.5 pt] L'aire du triangle ABC est $18\sqrt{3}$ cm^2 : Affirmation VRAIE.

Le triangle ABC est rectangle C donc son aire est la moitié du produit des deux côtés de l'angle droit. En utilisant le résultat de la question **2b.** résolue avec le théorème de Pythagore, on a $CB = \sqrt{108}$ soit :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{CA \times CB}{2}$$
$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{6 \times \sqrt{108}}{2}$$
$$\mathcal{A}_{ABC} = 3 \times \sqrt{108}$$
$$\mathcal{A}_{ABC} = 3 \times \sqrt{36 \times 3}$$
$$\mathcal{A}_{ABC} = 3 \times \sqrt{36} \times \sqrt{3}$$
$$\mathcal{A}_{ABC} = 3 \times 6 \times \sqrt{3}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{ABC} = 18\sqrt{3}\text{ cm}^2}$$

L'affirmation est donc **vraie**.

Remarque : Un élève ayant utilisé la trigonométrie pour résoudre la question **2.b.** pouvait ici être pénalisé.

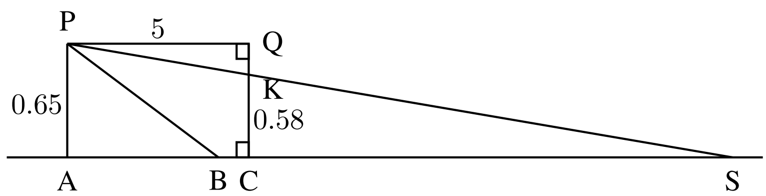
2. e. L'angle $\widehat{\text{BOC}}$ mesure 31 ˚ : Affirmation FAUSSE.

Les angles $\widehat{\text{BOC}}$ et $\widehat{\text{AOC}}$ sont adjacents et supplémentaires donc la somme de leur mesure fait 180°. On a donc en utilisant le résultat de la question **2c.**, on a $\widehat{\text{AOC}} = 60°$ soit :

$$\boxed{\widehat{\text{BOC}} = 180° - \widehat{\text{AOC}} = 180° - 60° = 120°}$$

L'affirmation est donc **fausse**.

Exercice 7. 6 points



1. [1.5 pt] Vérifier que les feux de croisement de Pauline sont réglés avec une inclinaison égale à 0,014.

D'après les données on a :

- Puisque le point Q appartient au segment [QC]$QK = QC - KC = 0,65 - 0,58 = 0,07$ m ;
- $QP = 5$ m.

Donc

$$\boxed{\frac{QK}{QP} = \frac{0,07}{5} = 0,014}$$

Les feux de croisement de Pauline sont réglés avec une **inclinaison égale à 0,014**.

2. [1.5 pt] Donner une mesure de l'angle $\widehat{QPK}$ correspondant à l'inclinaison.

Le triangle QPK est rectangle en Q donc :

$$\tan \widehat{QPK} = \frac{QK}{QP} = 0,014$$

soit arrondi au dixième

$$\boxed{\widehat{QPK} = \arctan 0,014 \approx 0,8°}$$

3. **[3 pts] Quelle est distance AS d'éclairage des feux ?**

- **Méthode 1**
Le quadrilatère APQC est un rectangle car il a 3 angles droits (donc quatre), de ce fait les angles $\widehat{SPA}$ et $\widehat{SPQ}$ sont complémentaires soit
$$\widehat{APQ} = 90° = \widehat{SPA} + \widehat{SPQ}$$
d'où :
$$\widehat{SPA} = 90 - \widehat{QPK} \approx 89,2°$$
Par conséquent dans le triangle APS rectangle en A on a :
$$\tan \widehat{SPA} = \frac{AS}{AP}$$
soit
$$\boxed{AS \approx 0,65 \times \tan 89,2 \approx 47 \text{ m}}$$
Remarque : Si on veut conserver les valeurs exactes jusqu'au bout on a :
$$AS = 0,65 \times \tan(90° - \arctan 0,014) \approx 46 \text{ m}$$
Les résultats sont alors sensiblement différents du fait de l'approximation faite de l'angle $\widehat{QPK}$ à la question précédente. **La valeur de 46 m étant la valeur la plus proche**.
- **Méthode 2**
  - Les droites (PS) et (CQ) sont sécantes en K :
  - les droites (CS) et (PQ) étant perpendiculaires à (QC), elles sont parallèles.

  On peut donc utiliser le théorème de THALÈS :
$$\frac{PQ}{CS} = \frac{QK}{CK} \iff \frac{5}{CS} = \frac{0,65 - 0,58}{0,58} = \frac{0,07}{0,58} \iff CS = \frac{0,58 \times 5}{0,07} \simeq 41 \text{ au mètre près}$$
Ainsi,
$$\boxed{AS = AC + CS \approx 5 + 41 = 46 \text{ m.}}$$

Exercice 8. 3 points

1. **Relever la phrase de l'énoncé qui permet d'affirmer que les droites (LH) et (MN) sont parallèles.**
On considère que les deux hélicoptères se situent à la même altitude et que le peloton des coureurs roule sur une route horizontale.

2. **Calculer la distance MN entre les deux motos.**
Dans le triangle AMN : H ∈ [AM], L ∈ [AN] et (LH) // (MN), donc, d'après le théorème de Thalès :
$$\frac{\text{AH}}{\text{AM}} = \frac{\text{AL}}{\text{AN}} = \frac{\text{HL}}{\text{MN}}$$
soit
$$\frac{720}{1\,000} = \frac{720}{1\,000} = \frac{270}{\text{MN}}$$
Donc
$$\boxed{MN = \frac{270 \times 1\,000}{720} = 375 \text{ m}}$$