Devoir Surveillé n°6
Correction
Troisième
Trigo, Équations et Inéquations
Durée 1.25 heure
année 2019-2020

Exercice 1. Vrai ou Faux — 3 points

Affirmation 1 (FAUSSE)

n désigne un nombre entier naturel. L'expression $n^2 - 6n + 9$ est toujours différente de 0.

Pour $n = 3$ on a :

$$n^2 - 6n + 9 = 3^2 - 6 \times 3 + 9 = 0$$

L'affirmation 1 est donc fausse.
On pouvait remarquer que :

$$n^2 - 6n + 9 = (n-3)^2$$

Et de ce fait :

$$(n-3)^2 = 0 \Longleftrightarrow (n-3) = 0 \Longleftrightarrow n = 3$$

Affirmation 2 (VRAIE)

Le nombre (-2) est une solution de l'équation $(E_1)\ :\ -x^2 - x + 2 = 0$.

Pour $n = -2$ on a :

$$-x^2 - x + 2 = -(-2)^2 - (-2) + 2 = -4 + 2 + 2 = 0$$

L'affirmation 2 est donc vraie

Affirmation 3 (FAUSSE)

Le nombre 3 est l'unique solution de l'équation $(E_2)\ :\ x^2 = 9$.

Pour $x = -3$ on a :

$$x^2 = (-3)^2 = 9$$

De fait 3 n'est pas l'unique solution de l'équation, L'affirmation 3 est donc fausse.

Exercice 2. D'après Brevet : Centre étrangers Gpe I, Maroc, 15 Juin 2015 — 3,5 points

1. Montrer que si on choisit 3 comme nombre de départ, les deux programmes donnent 25 comme résultat.

Programme A

Choix du nombre	3
Étape 1 : ajouter 2	$3 + 2 = 5$
Étape 2 : élever au carré	$5^2 = 25$
Résultat	25

Programme B

Choix du nombre	3
Étape 1 : ajouter 4	$3 + 4 = 7$
Étape 2 : multiplier par le nb de départ	$7 \times 3 = 21$
Étape 3 : ajouter 4	$21 + 4 = 25$
Résultat	25

2. Avec le programme A, quel nombre faut-il choisir au départ pour que le résultat obtenu soit 0 ?
En prenant -2 comme nombre de départ on obtient bien 0 en effet :

Programme A

Choix du nombre	-2
Étape 1 : ajouter 2	$-2+2=0$
Étape 2 : élever au carré	$0^2=0$
Résultat	0

Cependant, cette méthode ne prouve pas qu'il n'y en a pas d'autres et la question implique de le prouver. Reprenons le calcul précédent en prenant un x réel quelconque comme choix de départ.

Programme A

Choix du nombre	x
Étape 1 : ajouter 2	$x+2=0$
Étape 2 : élever au carré	$(x+2)^2$

On va alors résoudre l'équation : $(x+2)^2=0$.

$$(x+2)^2=0 \Longleftrightarrow (x+2)=0 \Longleftrightarrow x=-2$$

Avec le programme A, il faut donc uniquement choisir le nombre (-2) pour obtenir 0.

3. Ysah prétend que, pour n'importe quel nombre de départ, ces deux programmes donnent le même résultat. A-t-elle raison ? Justifier votre réponse.
En partant d'un réel x quelconque avec le programme B on obtient :

Programme B

Choix du nombre	x
Étape 1 : ajouter 4	$x+4$
Étape 2 : multiplier par le nb de départ	$(x+4)\times x=x^2+4x$
Étape 3 : ajouter 4	x^2+4x+4

Or en développant le résultat obtenu avec le programme A on obtient le même résultat :

$$(x+2)^2=x^2+4x+4$$

Pour n'importe quel nombre de départ, ces deux programmes donnent le même résultat. Ysah a donc raison.

Exercice 3. Équation — 2 points

On considère l'équation : $(E_3)\ :\ 2x-2=3x-7$.

1. Le nombre (-2) est-il solution de cette équation ?
Pour $x=-2$ on a :

- D'une part : $2x-2=2\times(-2)-2=-6$
- D'autre part : $3x-7=3\times(-2)-7=-13\neq-6$

Le nombre (-2) n'est pas solution de cette équation.

2. Résoudre cette équation.

$$\begin{aligned}(E_3)\ :\ 2x-2=3x-7 &\Longleftrightarrow 2x-3x=-7+2\\ &\Longleftrightarrow -x=-5\\ &\Longleftrightarrow x=5\end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc $x=5$.

Exercice 4. Inéquation — 3 points

On considère l'inéquation :

$$(I_1)\ :\ 5x-1>1-7x$$

1. Le nombre (-2) est-il solution de cette inéquation ?

Pour $x=-2$ on a :

- D'une part : $\underline{5x-1}=5\times(-2)-1=-11$
- D'autre part : $\underline{1-7x?}=1-7\times(-2)=15>-11$

Le nombre (-2) n'est pas solution de cette inéquation.

2. Résoudre cette inéquation et représenter les solutions sur un axe.

$$\begin{aligned}(I_1)\ :\ 5x-1>1-7x &\iff 5x+7x>1+1\\ &\iff 12x>2\\ &\iff x>\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Les solutions de cette inéquations sont donc les réels strictement supérieurs à $\dfrac{1}{6}$.

$$\boxed{S_1=\left]\frac{1}{6}\ ;\ +\infty\right[}$$

Exercice 5. Système d'inéquations — 3 points

On considère le système d'inéquations :

$$(\mathscr{S}_1)\ :\ \begin{cases}3x+1>-4 & :\ (I_2)\\ 1-4x\geq 2 & :\ (I_3)\end{cases}$$

1. Le nombre (-2) est-il solution de ce système ? our $x=-2$ on a :

- D'une part dans (I_2) on a : $\underline{3x+1}=3\times(-2)+1=-5<-4$

Le nombre (-2) n'est pas solution de cette inéquation (I_2) et donc pas solution du système.

2. Résoudre ce système d'inéquations et représenter les solutions sur un axe.

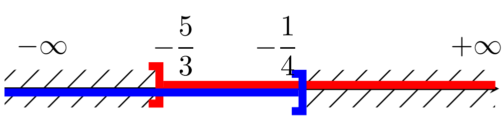
On va résoudre chacune des inéquations puis représenter les solutions sur un même axe. On en déduira alors les solutions (éventuelles) du système.

$$\begin{aligned}(I_2) &\iff 3x+1>-4\\ &\iff 3x>-5\\ (I_2) &\iff \boxed{x>-\frac{5}{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(I_3) &\iff 1-4x\geq 2\\ &\iff -4x\geq 1\\ (I_3) &\iff \boxed{x\leq -\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

<u>Écriture des solutions</u> (sous forme d'intervalle en seconde) :

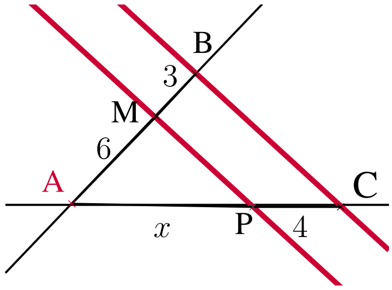
- Les solutions du système $(\mathscr{S})$ sont les réels strictement supérieurs à $\left(-\dfrac{5}{3}\right)$ et inférieurs ou égaux à $\left(-\dfrac{1}{4}\right)$.
- Représentation :



$$\boxed{S=\left]-\frac{5}{3}\ ;\ -\frac{1}{4}\right]}$$

Exercice 6. Et le revoici ! 3 points

On considère la configuration suivante où les droites (BM) et (PC) se coupent en A. Les droites (PM) et (BC) sont parallèles. Les longueurs sont en centimètres et on a : $AM = 6$; $MB = 3$; $AP = x$ et $PC = 4$.



Calculer x.

- Les points A, M, B et A, P, C sont alignés sur deux sécantes en A. Les droites (MP) et (BC) sont parallèles.
- Donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AC} \iff \frac{6}{9} = \frac{x}{x+4}$$

Et donc par produit en croix on obtient :

$$6(x+4) = 9x \iff 6x + 24 = 9x \iff 24 = 3x \iff \boxed{x = 8}$$

- La longueur AP mesure donc 8 cm.

Exercice 7. Un peu de trigo 2 points

On considère un angle aigu $\widehat{A}$ d'un triangle rectangle. Sachant que $\sin \widehat{A} = \frac{1}{2}$, calculer les valeurs exactes du cosinus de $\widehat{A}$ puis de sa tangente.

On a :

$$\cos^2 \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A} = 1$$

Soit

$$\cos^2 \widehat{A} = 1 - \sin^2 \widehat{A} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

Soit

$$\cos^2 \widehat{A} = \frac{3}{4}$$

Or le cosinus d'un angle aigu est positif (il est même compris entre 0 et 1) de ce fait :

$$\boxed{\cos \widehat{A} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

En outre on a :

$$\tan \widehat{A} = \frac{\sin \widehat{A}}{\cos \widehat{A}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

D'où :

$$\boxed{\tan \widehat{A} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

- Fin du devoir -