Devoir Surveillé n°3 Correction

Troisième

Calcul littéral

Durée 1 heure

Année 2019-2020

Exercice 1. 5 points

On considère l'expression $A(x)$ *définie par :* $A(x) = 25 - (1-2x)^2$.

1. **Calculer $A(x)$ pour $x = -1$ ce que l'on notera $A(-1)$.**

$$\begin{aligned} A(-1) &= 25 - \left(1 - 2\times(-1)\right)^2 \\ &= 25 - (1+2)^2 \\ &= 25 - 3^2 \\ A(-1) &= 25 - 9 = \underline{16} \end{aligned}$$

2. **Développer $A(x)$.**

$$\begin{aligned} A(x) &= 25 - (1-2x)^2 \\ A(x) &= 25 - \left(1 - 4x + 4x^2\right) \\ A(x) &= 25 - 1 + 4x - 4x^2 \\ A(x) &= \underline{-4x^2 + 4x + 24} \end{aligned}$$

3. **Factoriser $A(x)$.**

$$\begin{aligned} A(x) &= 25 - (1-2x)^2 \\ A(x) &= 5^2 - (1-2x)^2 \\ A(x) &= \left(5 - (1-2x)\right)\left(5 + (1-2x)\right) \\ A(x) &= \left(5 - 1 + 2x\right)\left(5 + 1 - 2x\right) \\ A(x) &= \underline{\left(4+2x\right)\left(6-2x\right)} \end{aligned}$$

Exercice 2. 5 points

On considère l'expression $B(x)$ *définie par :* $B(x) = (x+1)(1-4x) - 2(x+1)(x+5)$.

1. **Développer $B(x)$.**

$$\begin{aligned} B(x) &= (x+1)(1-4x) - 2(x+1)(x+5) \\ B(x) &= x - 4x^2 + 1 - 4x - 2\left(x^2 + 5x + x + 5\right) \\ B(x) &= -4x^2 - 3x + 1 - 2\left(x^2 + 6x + 5\right) \\ B(x) &= -4x^2 - 3x + 1 - 2x^2 - 12x - 10 \\ B(x) &= \underline{-6x^2 - 15x - 9} \end{aligned}$$

2. **Factoriser $B(x)$.**

$$\begin{aligned} B(x) &= (x+1)(1-4x) - 2(x+1)(x+5) \\ B(x) &= (x+1)\left[(1-4x) - 2(x+5)\right] \\ B(x) &= (x+1)\left[1 - 4x - 2x - 10\right] \\ B(x) &= \underline{(x+1)(-6x-9)} \end{aligned}$$

3. **Calculer $B(x)$ pour $x = -1$ ce que l'on notera $B(-1)$.**
   On peut utiliser l'expression de notre choix, le plus simple est ici avec la forme factorisée mais on peut par sécurité utiliser la forme initiale.

$$\begin{aligned}
B(x) &= (x+1)(1-4x) - 2(x+1)(x+5) \\
B(-1) &= \underbrace{(-1+1)}_{0}\Big(1-4\times(-1)\Big) - 2\underbrace{(-1+1)}_{0}(-1+5) \\
B(-1) &= 0\times 5 - 2\times 0\times 4 \\
\underline{B(-1)} &\underline{= 0}
\end{aligned}$$

Exercice 3. Dans un triangle rectangle 4 points

Soit ABC un triangle rectangle en A. On désigne par x un nombre positif et on a : $BC = x+7$; $AB = x+2$.

1. **Prouver que : $AC^2 = 10x+45$.**
   Le triangle ABC est un triangle rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
AC^2 &= BC^2 - AB^2 \\
AC^2 &= (x+7)^2 - (x+2)^2 \\
AC^2 &= x^2 + 14x + 49 - \left(x^2 + 4x + 4\right) \\
AC^2 &= x^2 + 14x + 49 - x^2 - 4x - 4 \\
AC^2 &= \underline{10x + 45}
\end{aligned}$$

2. **Ottavia affirme que l'aire du triangle rectangle ABC en fonction de x est : $\mathscr{A}_{ABC} = 10x^2 + 65x + 90$. Qu'en pensez-vous ? Justifier.**
   L'aire du triangle ABC rectangle en A est égale à la moitié du produit des longueurs des côtés perpendiculaires :

$$\mathscr{A}_{ABC} = \frac{AB\times AC}{2} = \frac{(x+2)\times\sqrt{10x+45}}{2}$$

   Ottavia a donc tort.

   On pouvait aussi utiliser un contre-exemple (qui nous servira pour la question suivante).

   Si $x = 5$ on a :

$$\begin{cases} AB = 7 \\ BC = 12 \\ AC = \sqrt{10\times 5+45} = \sqrt{95} \end{cases} \Longrightarrow \mathscr{A}_{ABC} = \frac{AB\times AC}{2} = \frac{7\times\sqrt{95}}{2}$$

   Or en remplaçant x par 5 dans l'expression d'Ottavia on trouve :

$$10x^2 + 65x + 90 = 10\times 5^2 + 65\times 5 + 90 = 665$$

   Donc ottavia a bien tort.

3. **Donner les dimensions du triangle ABC si $x = 5$ ainsi que son aire. On suppose les mesures données en cm.**
   Si $x = 5$ on a :

$$\begin{cases} AB = 7 \\ BC = 12 \\ AC = \sqrt{10\times 5+45} = \sqrt{95} \end{cases} \Longrightarrow \mathscr{A}_{ABC} = \frac{AB\times AC}{2} = \frac{7\times\sqrt{95}}{2}$$

Exercice 4. Programme de calcul — 6 points

Programme A	Programme B
• Choisir un nombre • Soustraire 3 • Calculer le carré du résultat obtenu	• Choisir un nombre • Calculer le carré de ce nombre • Ajouter le triple du nombre de départ • Ajouter 7

1. **Corinne choisit le nombre 1 et applique le programme A. Expliquer en détaillant les calculs que le résultat du programme de calcul est 4.**

Programme A	
Choix	1
Soustraire 3	$1-3=-2$
Carré du résultat	$(-2)^2=4$

2. **Tidjane choisit le nombre -5 et applique le programme B. Quel résultat obtient-il ?**

Programme B	
Choix	-5
Carré	$(-5)^2=25$
Ajouter le triple du nombre de départ	$25+3\times(-5)=25-15=10$
Ajouter 7	$10+7=17$

Tidjane va donc obtenir 17 en partant de (-5) avec le programme B.

3. **Lina souhaite regrouper le résultat de chaque programme à l'aide d'un tableur. Elle crée la feuille de calcul ci-dessous. Quelle formule, copiée ensuite à droite dans les cellules C3 à H3, a-t-elle saisie dans la cellule B3 ?**

B2 | =(B1-3)^2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nombre de départ	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	Résultat du programme A	36	25	16	9	4	1	0
3	Résultat du programme B	7	5	5	7	11	17	25

La formule, copiée à droite dans les cellules C3 à H3, saisie dans la cellule B3 est :

$$=B1\wedge 2+3*B1+7 \quad \text{ou} \quad B1*B1+3*B1+7$$

4. **Zoé cherche à trouver un nombre de départ pour lequel les deux programmes donnent le même résultat. Pour cela, elle appelle x le nombre choisi au départ et exprime le résultat de chaque programme de calcul en fonction de x.**

4. a. Montrer que le résultat du programme A en fonction de x peut s'écrire sous forme développée et réduite : x^2-6x+9.

Programme A	
Choix	x
Soustraire 3	$x-3$
Carré du résultat	$(x-3)^2=\underline{x^2-6x+9}$

4. b. Écrire le résultat du programme B.

Programme B	
Choix	x
Carré	x^2
Ajouter le triple du nombre de départ	x^2+3x
Ajouter 7	x^2+3x+7

Question Bonus

Dans l'exercice 4, existe-t-il un nombre de départ pour lequel les deux programmes donnent le même résultat ? Si oui, lequel ?
On cherche si il existe des valeurs de x telles que les deux programmes donnent le ,même résultat soit :

$$\begin{aligned}
x^2-6x+9=x^2+3x+7 &\iff -6x-3x=7-9\\
&\iff -9x=-2\\
&\iff x=\frac{-2}{-9}=\frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Seule la valeur de départ $x=\frac{2}{9}$ donnera le même résultat pour les deux programmes. Ce dernier sera, pour $x=\frac{2}{9}$ dans le programme A :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{9}\right)^2-6\times\left(\frac{2}{9}\right)+9 &= \frac{4}{81}-\frac{12\times 9}{9\times 9}+\frac{81\times 9}{81}\\
&= \frac{4-108+729}{81}\\
&= \boxed{\frac{625}{81}}
\end{aligned}$$

Question Bonus

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3
Soit n un entier, la somme de trois entiers consécutifs s'écrit alors :

$$(n-1)+n+(n+1)=3n$$

C'est bien un multiple de 3 puisque n est entier.