Devoir Surveillé n°9
Correction

Puissances et équations
Durée 1 heure

Correction DS n°7 - Quatrième - Avril

Exercice 1. Compléter sur cette feuille : Puissances et propriétés ... /1,5 points

1. $2^{\boxed{-2}} \times 2^3 = 2^1$
2. $\dfrac{5^{10}}{5^{-10}} = 5^{\boxed{20}}$
3. $\boxed{5^3} \times 3^3 = 15^3$
4. $10^{\boxed{1}} \times 10 = 10^2$
5. $910,5 = 9,105 \times 10^{\boxed{2}}$
6. $-0,05 = \boxed{-5} \times 10^{-2}$

Exercice 2. Compléter sur cette feuille : Équations ... /1,5 points

Donner directement et sans justification, la solution des équations suivantes :

1. $(E_1)\ :\ 2x + 1 = 3$; la solution est $\boxed{x_1 = 1}$
2. $(E_2)\ :\ 5x = 10$; la solution est $\boxed{x_2 = 2}$
3. $(E_3)\ :\ -6x = 12$; la solution est $\boxed{x_3 = -2}$
4. $(E_4)\ :\ x - 2 = -3$; la solution est $\boxed{x_4 = -1}$
5. $(E_5)\ :\ 10x = 10$; la solution est $\boxed{x_5 = 1}$
6. $(E_6)\ :\ -10x = -10$; la solution est $\boxed{x_1 = 1}$;

Exercice 3. Équations 3,5 points

On considère l'équation :

$$(E_7)\ :\ 2(x+3) = 7x + 1$$

1. **Les nombres -3 et 1 sont-ils solutions de l'équation (E_7)** ?
   - Pour $x = -3$ on a :
   $$\begin{cases} 2(x+3) & = & 2 \times (-3+3) = 2 \times 0 = 0 \\ 7x+1 & = & 7 \times (-3) + 1 = -21 + 1 = -20 \end{cases}$$
   Les résultats sont différents donc **-3 n'est pas solution de (E_7)**.
   - Pour $x = 1$ on a :
   $$\begin{cases} 2(x+3) & = & 2 \times (1+3) = 2 \times 4 = 8 \\ 7x+1 & = & 7 \times 1 + 1 = 8 \end{cases}$$
   Les résultats sont égaux donc **1 est solution de (E_7)**.
2. **Résoudre l'équation** (E_7) **et retrouver le résultat de la question précédente**.

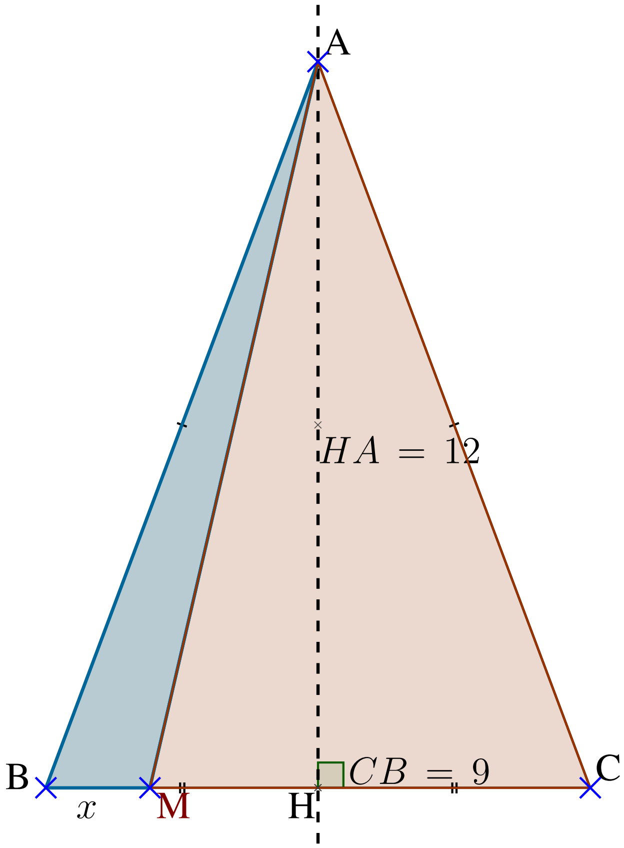
$$\begin{aligned} (E_7)\ :\ 2(x+3) = 7x+1 &\iff 2x + 6 = 7x + 1 \\ &\iff 5 = 5x \\ &\iff x = \frac{5}{5} = 1 \end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation (E_7) est donc $\boxed{x_7 = 1}$.
On retrouve bien les résultats de la question précédente.

Exercice 4. Équations et problème 4,5 points

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A, tel que le côté [BC] mesure 9 cm et la hauteur relative à ce côté (donc passant par A) mesure 12 cm. M est un point du segment [BC], on pose : $BM = x$.

2. a. [1 point] Faire une figure.



2. b. [1 point] Démontrer que l'aire du triangle ABM, exprimée en cm², est égale à : $\mathscr{A}_{ABM} = 6x$.

ABM est un triangle de hauteur AH relative au côté [BM] donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{ABM} &= \frac{AH \times BM}{2}\\ &= \frac{12 \times BM}{2}\\ &= 6 \times BM\end{aligned}$$

Puisque $BM = x$ on a :

$$\boxed{\mathscr{A}_{ABM} = 6x}$$

2. c. [1 point] Démontrer que l'aire du triangle ACM, exprimée en cm², est égale à : $\mathscr{A}_{ACM} = 54 - 6x$.

ACM est un triangle de hauteur AH relative au côté [CM] donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{ACM} &= \frac{AH \times CM}{2}\\ &= \frac{12 \times CM}{2}\\ &= 6 \times CM\end{aligned}$$

Puisque M appartient au segment [BC] on a $CM = BC - BM = 9 - x$

$$\mathscr{A}_{ACM} = 6(9 - x)$$

Puis en dévelopant on obtient

$$\boxed{\mathscr{A}_{ACM} = 54 - 6x}$$

2. d. [1,5 point] Pour quelle valeur de x l'aire du triangle ABM est-elle le double de celle du triangle ACM ?

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_{ABM} = 2 \times \mathscr{A}_{ACM} &\iff 6x = 2 \times (54 - 6x) \\ &\iff 6x = 108 - 12x \\ &\iff 18x = 108 \\ &\iff x = \frac{108}{18} = 6\end{aligned}$$

L'aire du triangle ABM est le double de celle du triangle ACM pour $\boxed{\boldsymbol{BM = x = 6}}$

Exercice 5. Notation scientifique — 3 points

Donner l'écriture scientifique des nombres suivants en détaillant vos calculs.

1. $A = \dfrac{49 \times 10^3 \times 6 \times 10^{-10}}{14 \times 10^{-2}} = \boxed{2,1 \times 10^{-4}}$

2. $B = \dfrac{3 \times 10^2 \times 1,2 \times \left(10^{-3}\right)^{-4}}{0,2 \times 10^{-2}} = \boxed{1,8 \times 10^{17}}$

Exercice 6. La vitesse de la lumière — 6 points

De nos jour, la vitesse de la lumière, notée c (pour célérité), est estimée à : $c \approx 299\ 792$ km.s^{-1}. Cette valeur a été fixée en 1983 par le *Bureau international des poids et mesures*.

1. [1 point] Dès 1862, le scientifique français Léon Foucault (1819-1868) calcule une bonne estimation de la vitesse de la lumière. Il obtient une valeur de : $v_1 = 298\ 000$ km.s^{-1}. Donner l'écriture scientifique de v_1 et évaluer l'erreur commise en pourcentage.

- On a : $\boxed{v_1 = 2,98 \times 10^5 \text{ km.s}^{-1}}$;
- L'erreur commise est donc de

$$erreur = c - v_1 = 299\ 792 - 298\ 000 = 1\ 792 \text{ km.s}^{-1}$$

ce qui correspond, en pourcentage de la valeur réelle à

$$\boxed{\frac{erreur}{c} = \frac{1\ 792}{299\ 792} \approx 0,005978 \text{ soit environ } 0,60\%}$$

Pour la suite de cet exercice, on retiendra pour les calculs la valeur de **de $c' \approx 300\ 000$ km.s^{-1}**.

2. Quelques secondes, quelques minutes-lumière !

2. a. [1 point] La lune est en moyenne à 384 000 km de la Terre.
Exprimer cette distance en notation scientifique puis calculer le temps que met la lumière pour parcourir cette distance.

- La distance en notation scientifique est : $\boxed{d_{T-L} = 3,84 \times 10^5 \text{ km}}$.
- Temps mis par la lumière pour faire la distance Terre-Lune :
  Pour cela on peut faire un tableau de proportionnalité ou appliquer directement la formule $v = \dfrac{d}{t}$ soit $t = \dfrac{d}{v}$.

  Sachant que la lumière parcourt environ 300 000 km = 3×10^5 km en 1 seconde on a :

distance (en km)	300 000 km	$3,84 \times 10^5$ km
temps (en s)	1 s	?

et donc

$$\boxed{t_{T-L} = \frac{3,84 \times 10^5 \times 1}{3 \times 10^5} = \frac{3,84}{3} = 1,28 \text{ s}}$$

2. b. [1 point] Le Soleil est en moyenne à 149 597 870 km de la Terre (environ 150 millions de km). Exprimer cette distance en notation scientifique puis calculer le temps que met la lumière pour parcourir cette distance.

- La distance en notation scientifique est : $\boxed{d_{T-S} = 1{,}495\,978\,7 \times 10^8 \text{ km}}$.
- Temps mis par la lumière pour faire la distance Terre-Soleil :
  Sachant que la lumière parcourt environ 300 000 km = 3×10^5 km en 1 seconde on a :

distance (en km)	300 000 km	$1{,}495\,978\,7 \times 10^8$ km
temps (en s)	1 s	?

et donc

$$\boxed{t_{T-S} = \frac{1{,}495\,978\,7 \times 10^8 \text{ km} \times 1}{3 \times 10^5} = \frac{1{,}495\,978\,7}{3} \times 10^3 \approx 499 \text{ s} \approx 8,3 \text{ min}}$$

3. Années-lumière (a.l.)

3. a. [1 point] Estimation de la distance parcourue par la lumière en 1 heure, exprimée en notation scientifique.

distance (en km)	300 000 km	? km
temps (en s)	1 s	3 600 s $(= 1 \text{ h})$

La distance parcourue par la lumière en 1 heure est donc de

$$\boxed{d = 3 \times 10^5 \times 3\,600 = 108 \times 10^7 = 1,08 \times 10^9 \text{ km soit environ 1 milliard de km}}$$

3. b. [1 point] La distance parcourue par la lumière en 1 année de 365 jours, est une unité de mesure de distance appelée année-lumière, de symbole a.l.. Montrer qu'une année-lumière (1 a.l.) est environ égale à 9 500 milliards de kilomètres puis exprimer le résultat en notation scientifique.

Une année de 365 jours comporte $365 \times 24 = 8\,760$ heures et donc d'après la question précédente, la distance parcourue par la lumière en 1 année est de :

$$1 \text{ a.l.} = 8\,760 \times 1,08 \times 10^9 \text{ km}$$
$$1 \text{ a.l.} = 9\,460,8 \times 10^9 \text{ km}$$

$$\boxed{1 \text{ a.l.} = 9,46 \times 10^{12} \text{ km soit environ 9 500 milliards de km}}$$

3. c. [1 point] *Proxima Centori (PC)*, la plus proche des étoile du système solaire est à 4,22 années-lumière. Exprimer sa distance à la Terre en km et en notation scientifique.

$$d_{T-PC} = 4,22 \times 1 \text{ a.l.}$$
$$d_{T-PC} = 4,22 \times 9,46 \times 10^{12} \text{ km}$$
$$d_{T-PC} = 39{,}921\,2 \times 10^{12} \text{ km}$$

$$\boxed{d_{T-PC} = 3{,}992\,12 \times 10^{13} \text{ km soit environ 40 000 milliards de km}}$$

Remarque : en utilisant la valeur 1 a.l. = 9 500 milliards de km on obtient :

$$\boxed{d_{T-PC} = 4,22 \times 9\,500 \times 10^9 \text{ km} \approx 4{,}009 \times 10^{13} \text{ km}}$$

Bonus — 2 points

Résoudre l'équation : $(E_8) \ : \ \dfrac{2x-1}{5} = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{15}$ En multipliant les deux membres de l'équation par 15 on obtient :

$$\begin{aligned}
(E_8) \ : \ \frac{2x-1}{5} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{15} &\iff \frac{15}{5}(2x-1) = \frac{2 \times 15}{3}x - 1 \\
&\iff 3(2x-1) = 10x - 1 \\
&\iff 6x - 3 = 10x - 1 \\
&\iff -2 = 4x \\
(E_8) &\iff \frac{-2}{4} = x \\
(E_8) &\iff x = \frac{-1}{2}
\end{aligned}$$

L'unique solution de l'équation (E_8) est donc $\boxed{x_8 = -\dfrac{1}{2}}$