Correction Devoir Surveillé n° 4 (Bilan)

Triangles/Opérations/Relatifs/Symétrie

Durée 2 heures -Cinquième - 2019-2020

Exercice 1. Compléter sur cette feuille (2 points)

1. Compléter :

1. a. $-6 - \boxed{(-10)} = 4$

1. b. $-9,5 - \boxed{(-5)} = -4,5$

1. c. $2 + \boxed{(-8)} = -6$

1. d. $1,9 + \boxed{(-1,9)} = 0$

2. Compléter :

2. a. $-6 - 5 = \boxed{(-11)}$

2. b. $-11 - 10,5 = \boxed{(-21,5)}$

2. c. $-100 + 90 = \boxed{(-10)}$

2. d. $-10 - (-1) = \boxed{(-9)}$

Exercice 2. Dans un repère (4 points)

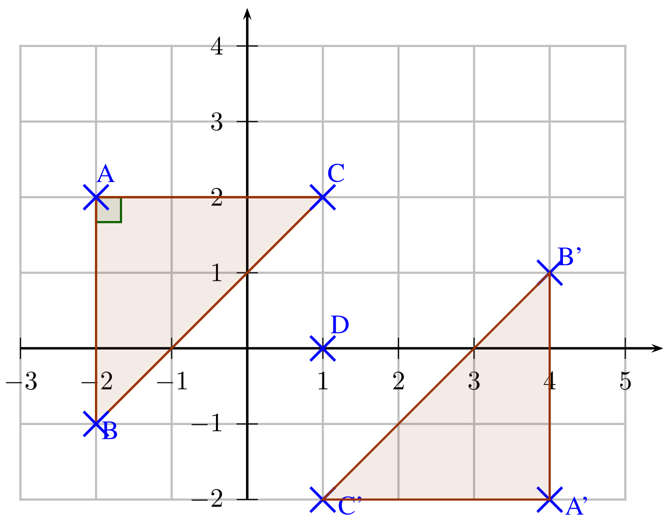
Dans le repère orthogonal ci-contre, on a tracé ABC, un triangle rectangle et isocèle en A.

1. [0,5 point]
$\boxed{A(-2\ ;\ 2), B(-2\ ;\ -1), C(1\ ;\ 2) \text{ et } D(1\ ;\ 0)}$.

2. [1 point] Construire sur cette feuille le triangle A'B'C', image du triangle ABC par la symétrie de centre D.

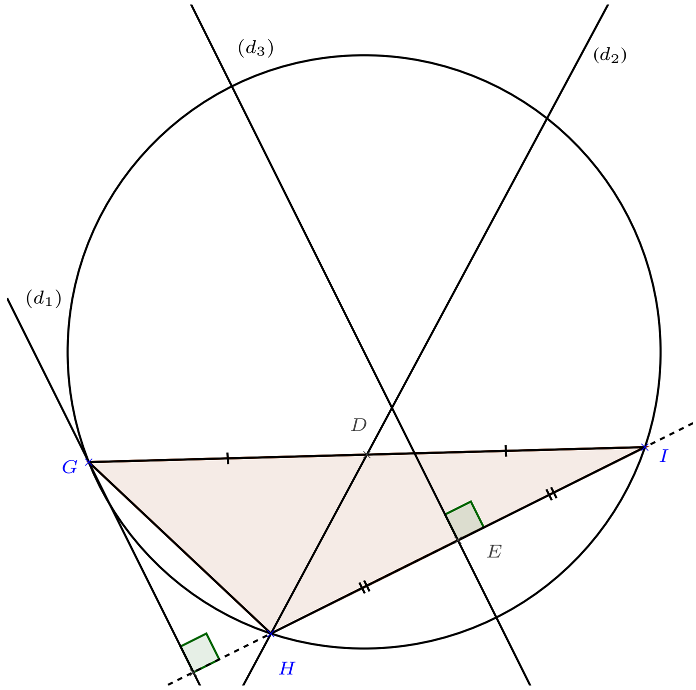
3. [0,5 point]
$\boxed{A'(4\ ;\ -2), B'(4\ ;\ 1), C'(1\ ;\ -2)}$.

4. [1 point] Démontrer sur votre copie que les droites (BC) et (B'C') sont parallèles.
La symétrie de centre D, transforme la droite (BC) en la droite (B'C'). Or par propriété, la symétrie centrale transforme une droite en une droite parallèle, donc les droites (BC) et (B'C') sont parallèles.



5. [1 point] Que dire du triangle A'B'C' ?
La symétrie centrale transforme une figure, en une figure superposable, donc de même nature. de ce fait, le triangle A'B'C', image du triangle ABC est aussi rectangle et isocèle en A'.

Exercice 3. Droites remarquables (3 points)



1. **[2 points]** Tracer sur cette feuille :
   1. a. (d_1), la hauteur issue de G dans le triangle GHI ;
   1. b. (d_2), la médiane issue de H dans le triangle GHI ;
   1. c. (d_3), la médiatrice du segment [HI] ;
   1. d. Le cercle circonscrit du triangle GHI.
2. Sur votre copie :
   2. a. [1 point] Démontrer que les droites (d_1) et (d_3) sont parallèles.
   Au collège, une démonstration se fait souvent en 3 étapes :

- **Étape 1 : Les données**
  - La droite <u>(d_1) est perpendiculaire à la droite (HI)</u> car c'est la hauteur issue de G dans le triangle GHI ;
  - La droite <u>(d_3) est aussi perpendiculaire à la droite (HI)</u> car c'est la médiatrice du segment $[HI]$.
- **Étape 2 : Le théorème**

Théorème 1

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite,
Alors, elles sont parallèles entre elles.

- **Étape 3 : Conclusion**
  Donc par le *théorème 1*, $\boxed{\text{les droites } (d_1) \text{ et } (d_3) \text{ sont parallèles}}$ car elles sont toutes les deux perpendiculaires à une même troisième droite (HI) .

Exercice 4. Vrai ou Faux (4 points)

1. **FAUX**. **C est un point appartenant à un segment [AB] ; on a alors $AB > AC + CB$.**
   C est un point appartenant à un segment [AB] ; on a alors $AB = AC + CB$
2. **FAUX**. **Dans un triangle ABC, la hauteur issue du sommet C passe par le milieu du segment [AB].**
   Par définition, la hauteur issue de C est une droite qui passe par le sommet C et qui est perpendiculaire au côté opposé, donc à la droite (AB). Elle ne passe donc pas nécessairement par le milieu du côté [AB] sauf si le triangle est isocèle en C.
3. **[1 point] FAUX**. **Pour $a = 5$, l'expression $3 - 2 \times a$ est égale à 5.**
   Pour $a = 5$ on a :

$$\begin{aligned}3 - 2 \times a &= 3 - 2 \times 5\\ &= 3 - 10\\ &= -7\end{aligned}$$

4. **FAUX**. **La somme de deux nombres relatifs de même signe est toujours positive.**
En effet, le contre-exemple suivant : $(-2)+(-3)=-5$ prouve que l'affirmation est fausse.

5. **FAUX**. **La somme de deux nombres relatifs de signe opposé est toujours négative.** En effet, le contre-exemple suivant : $(-2)+(+3)=+1$ prouve que l'affirmation est fausse.

6. **[1 point] VRAI**. **Par une symétrie centrale, un point, son symétrique et le centre de symétrie sont toujours alignés**.
En effet, si A' est le symétrique du point A par rapport à la symétrie de centre O, le point O est le milieu du segment [AA'] et donc les trois points sont alignés.

Exercice 5. Expression littérale (2 points)

On considère l'expression littérale définie par : $f(x)=x+1+(x-6)-(4-x)$

1. Pour $x=2$, montrer que la valeur de l'expression, notée $f(2)$, est $\boxed{f(2)=-3}$;

2. Pour $x=3$, $\boxed{f(3)=0}$.

Exercice 6. Effectuez les calculs suivants (4 points)

1. **[1 point]** $A=2-\Big(2-3\times 4\Big)-2\times 3=\boxed{6}$

2. **[1,5 point]** $B=10-\Big(5-2\times 3\Big)+(2-3)-\dfrac{6-1}{4+1}=\boxed{9}$

3. **[1,5 point]** $C=2,3-3,5+7,7-6,5+25-1-25=\boxed{-1}$

Exercice 7. Fractions (2 points)

Effectuer les calculs suivants :

1. $D=\dfrac{7\times(5-2)-1}{3\times(5-4)+2}=\boxed{4}$

2. $E=\dfrac{12-5+1}{10\div(3+2)}=\boxed{4}$

Exercice 8. Construction (3 points)

1. **[1 point]** Construire sur votre copie le triangle ABC tel que $AB=8$ cm, $\widehat{A}=40°$ et $\widehat{B}=50°$.

2. **[1 point]** Construire le cercle circonscrit au triangle ABC.

3. **[1 point] Évaluer la longueur de ce cercle $\mathscr{C}$ par la méthode de votre choix**.
Il semble que le centre du cercle circonscrit soit le milieu du segment [AB] et donc que le rayon du cercle soit égal à 4 cm.
De ce fait on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{\mathscr{C}}&=\text{Diamètre}\times\pi\\&=8\text{ cm}\times\pi\\&\approx 8\times 3,14\\\mathscr{P}_{\mathscr{C}}&\approx 25,1cm\end{aligned}$$

$\boxed{\text{La longueur de ce cercle circonscrit est d'environ } 25,1\text{ cm}}$.

Exercice 9. Déjà vu (5 points)

1. **[0,5 point]** Construire sur votre copie, deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de même centre O et de rayon 3 cm et 5 cm.

2. **[0,5 point]** Tracer un diamètre [AB] du cercle $\mathscr{C}_1$ et un diamètre [CD] du cercle $\mathscr{C}_2$, les points A, B, C et D n'étant pas alignés.

3. Démontrer que :

3. a. [2 points] les droites (AC) et (BD) sont parallèles ;

- On notant s_O la symétrie de centre O on a :
  - $A \xmapsto{s_O} B$: car [AB] est un diamètre du cercle $\mathscr{C}_1$ et donc O est le milieu du segment [AB] ;
  - $C \xmapsto{s_O} D$: car [CD] est un diamètre du cercle $\mathscr{C}_2$ et donc O est le milieu du segment [CD] ;
- De ce fait $(AC) \xmapsto{s_O} (BD)$, la symétrie de centre O transforme la droite (AC) en la droite (CD). Or la symétrie centrale transforme une droite en une droite parallèle, donc **les droites (AC) et (BD) sont parallèles**.

3. b. [2 points] les longueurs AD et BC sont égales.

- De même on a :
  - $A \xmapsto{s_O} B$;
  - $D \xmapsto{s_O} C$;
- De ce fait $[AD] \xmapsto{s_O} [BC]$, la symétrie de centre O transforme le segment [AD] en le segment [BC]. Or la symétrie centrale est une isométrie elle conserve les longueurs, donc **les longueurs AD et BC sont égales**.

4. **Bonus** [2 points]
Les deux cercles représentent les bords d'une piste de vitesse, 1 cm représentant 500 m. On veut grillager cette piste sur les deux côtés pour éviter que les spectateurs ne soient blessés pendant la course.
Évaluer la longueur de grillage nécessaire.
Il suffit de calculer la longueur des deux cercles puis d'utiliser la conversion d'échelle.

- **Longueur ℓ des deux cercles en cm :**

$$\begin{aligned}\ell &= \mathscr{P}_{\mathscr{C}_1} + \mathscr{P}_{\mathscr{C}_2}\\ &= 6 \text{ cm} \times \pi + 10 \text{ cm} \times \pi\\ &= 16 \text{ cm} \times \pi\\ &\approx 16 \times 3,14\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\ell \approx 50,24 \text{ cm}}$$

- **Longueur du grillage en m** :
1 cm représentant 500 m donc

$$50,24 \times 500 = 25\,120 \text{ m} = 25,12 \text{ km}$$

$\boxed{\text{La longueur de grillage nécessaire est d'environ 25 km}}$.

Remarque :
Un problème de précision se pose, il nous faudrait plus de décimales de π pour avoir un résultat au mètre près par exemple.
La calculatrice nous donne 8 décimales de π et dans ce cas on obtient une longueur de grillage de

$$16 \times \pi \times 500 \approx 25\,132,74 \text{ m} \approx \boxed{25\,133 \text{ m}}$$

- Fin du devoir